جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

معادلات تفاضلية /2/

الفصل الثاني للعام الدراسي 2016-2015

اسم الطالب :

السؤال الأول : (35درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2-x+1)y''-x(x+1)y'+(x+1)y=(x^2-x+1)^2e^{-x}$$

السؤال الثاني: (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة $y^{(4)}+6y'''+5y''-24y'-36y=-48e^{x}+2x^2+96chx$

والمطلوب : 1" – أوجد الحل العام للمتجانسة المناظرة إذا علمت أن $y=e^{2x}$ حلا"خاصا"لها

2" _ اقترح حلا" خاصا" بطريقة المعاملات غير المعينة (دون تعيين المعاملات)

3" _أوجد حلا" خاصا" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي،ماهو الحل العام لها .

السؤال الثالث: (30درجة)

بإجراء التغيير المناسب على المتحول المستقل حول المعادلة التفاضلية

$$(\cos x)y''+(\sin x)y'-(2\cos^3 x)y=2\cos^5 x$$

إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة .

==============================

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

١٣/٦/٢٠١٦م

الإجابات النموذجية مع سلم درجات أسئلة المعادلات /2/ الفصل الثاني 2016

جواب السؤال الأول

الحل العام للمعادلة المعطاة يعطى على الصورة $y = y_h + y_p$

حيث y_h الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة أما y_p فهو حل خاص للمعادلة المعطاة ، المعادلة المتجانسة المناظرة هي

- $(x^2 - x + 1)y'' - (x^2 + x)y' + (x+1)y = 0$

تكون الدالة $y_1 = x$ حل خاص للمعادلة إذا وفقط إذا كان $p_1 + xp_0 = 0$

وبما أن $-(x^2+x)+x(x+1)=0$ فإن الدالة $y_1 = x$ تكون حل خاص لها

،وعندئذ الحل العام للمعادلة (*) يعطى بالصيغة الآتية

$$y_h = y_1\left[\int \frac{c_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right] \quad (1)$$

$$e^{-\int \frac{-(x^2+x)}{(x^2-x+1)}dx} = e^{\int\left(1+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)dx} = e^{x+\ln(x^2-x+1)} = (x^2-x+1)e^x$$

نعوض في (1) فنجد أن $y_h = x\left[\int \frac{c_1(x^2-x+1)e^x}{x^2}dx + c_2\right]$

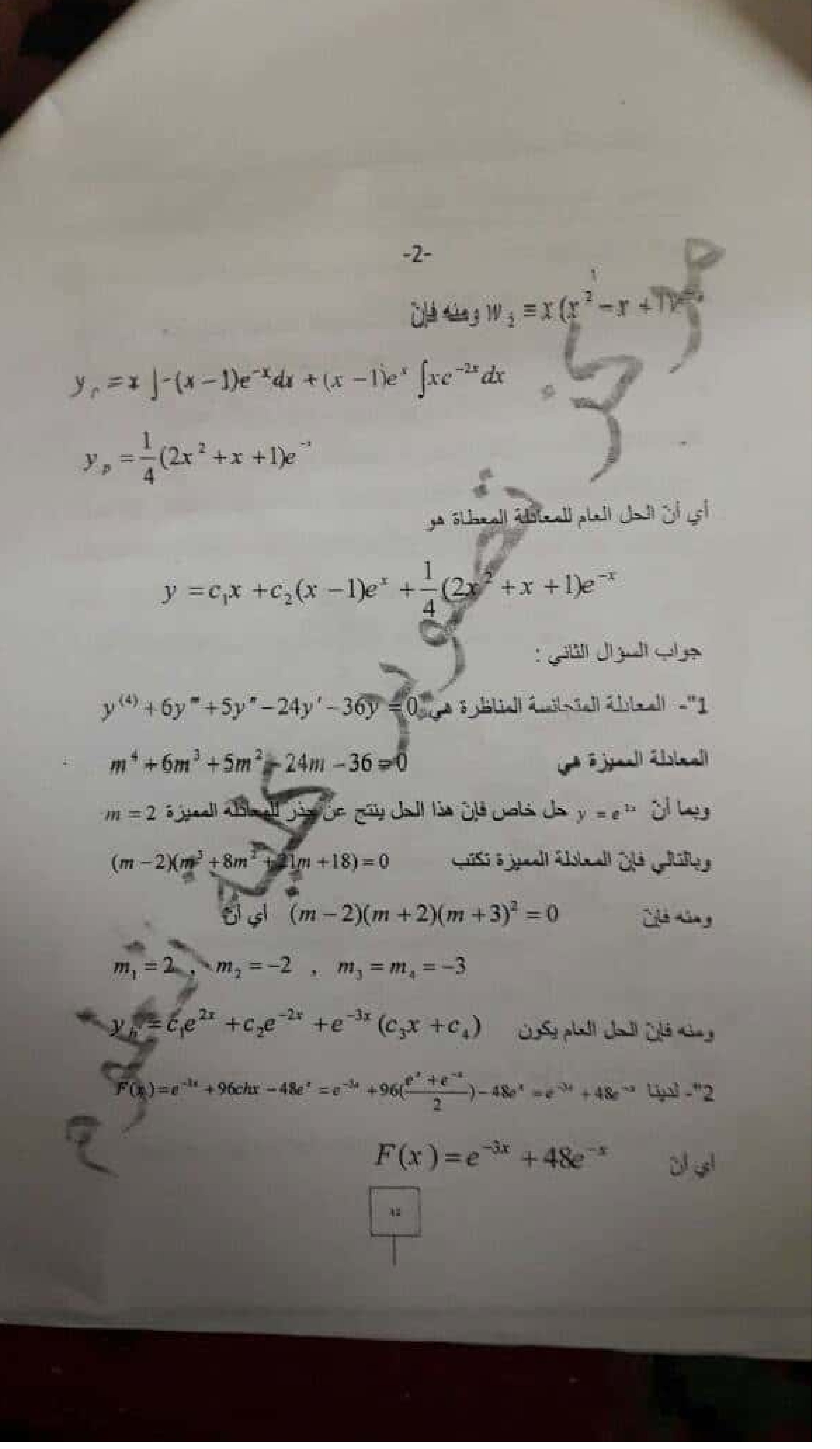
أي أن

$$(2) \quad y_h = x\left[c_1\int e^x dx - c_1\int \frac{e^x}{x}dx + c_1\int \frac{e^x}{x^2}dx + c_2\right]$$

$$y_h = x\left[c_1 e^x - c_1\int \frac{e^x}{x}dx + c_1\left(-\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x}dx\right) + c_2\right]$$

$$y_h = c_1(x-1)e^x + c_2 x$$

$w(x,(x-1)e^x) = (x^2-x+1)e^x$ و $w_1 = -(x-1)(x^2-x+1)$



ومنه فإنّ $W_3 = x(x^2 - x + 1)$

$$y_p = x\int -(x-1)e^{-x}dx + (x-1)e^{x}\int xe^{-2x}dx$$

$$y_p = \frac{1}{4}(2x^2 + x + 1)e^{-x}$$

أي أنّ الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2(x-1)e^{x} + \frac{1}{4}(2x^2 + x + 1)e^{-x}$$

جواب السؤال الثاني :

1"- المعادلة المتجانسة المناظرة هي $y^{(4)} + 6y''' + 5y'' - 24y' - 36y = 0$

المعادلة المميزة هي $m^4 + 6m^3 + 5m^2 - 24m - 36 = 0$

وبما أنّ $y = e^{2x}$ حل خاص فإنّ هذا الحل ينتج عن جذر للمعادلة المميزة $m = 2$

وبالتالي فإنّ المعادلة المميزة تكتب $(m-2)(m^3 + 8m^2 + 21m + 18) = 0$

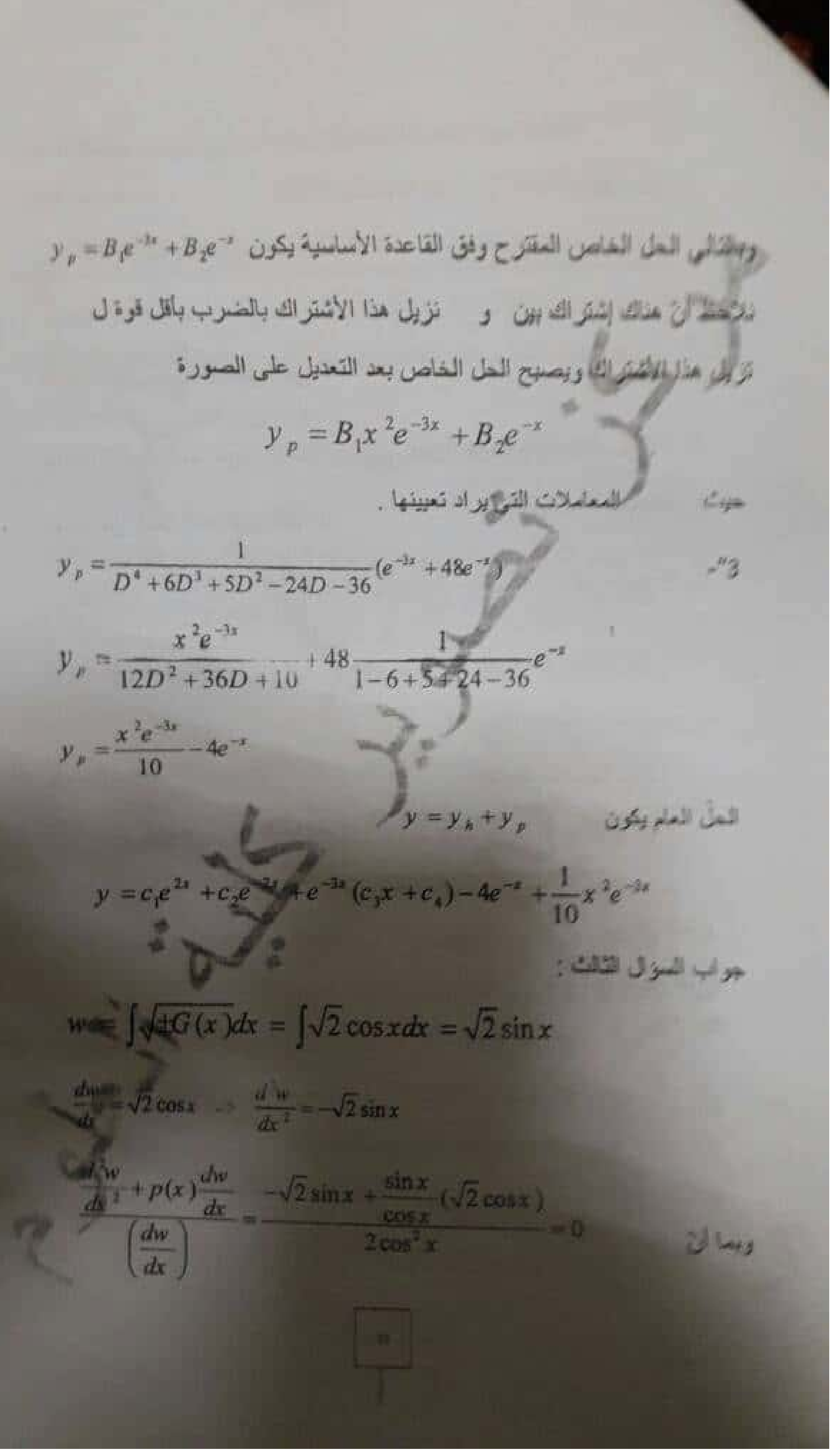
ومنه فإنّ $(m-2)(m+2)(m+3)^2 = 0$ أي أنّ

$$m_1 = 2 \;,\; m_2 = -2 \;,\; m_3 = m_4 = -3$$

ومنه فإنّ الحل العام يكون $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{-3x}(c_3 x + c_4)$

2"- لدينا $F(x) = e^{-3x} + 96chx - 48e^{x} = e^{-3x} + 96\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) - 48e^{x} = e^{-3x} + 48e^{-x}$

أي أنّ $F(x) = e^{-3x} + 48e^{-x}$



وبالتالي الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية يكون $y_p = B_1e^{-3x} + B_2e^{-x}$

ونلاحظ أن هناك إشتراك بين و نزيل هذا الأشتراك بالضرب بأقل قوة ل

نزيل هذا الأشتراك ويصبح الحل الخاص بعد التعديل على الصورة

$$y_p = B_1x^2e^{-3x} + B_2e^{-x}$$

حيث المعاملات التي يراد تعيينها .

3-

$$y_p = \frac{1}{D^4 + 6D^3 + 5D^2 - 24D - 36}(e^{-3x} + 48e^{-x})$$

$$y_p = \frac{x^2e^{-3x}}{12D^2 + 36D + 10} + 48\frac{1}{1 - 6 + 5 + 24 - 36}e^{-x}$$

$$y_p = \frac{x^2e^{-3x}}{10} - 4e^{-x}$$

الحل العام يكون $y = y_h + y_p$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + e^{-3x}(c_3x + c_4) - 4e^{-x} + \frac{1}{10}x^2e^{-3x}$$

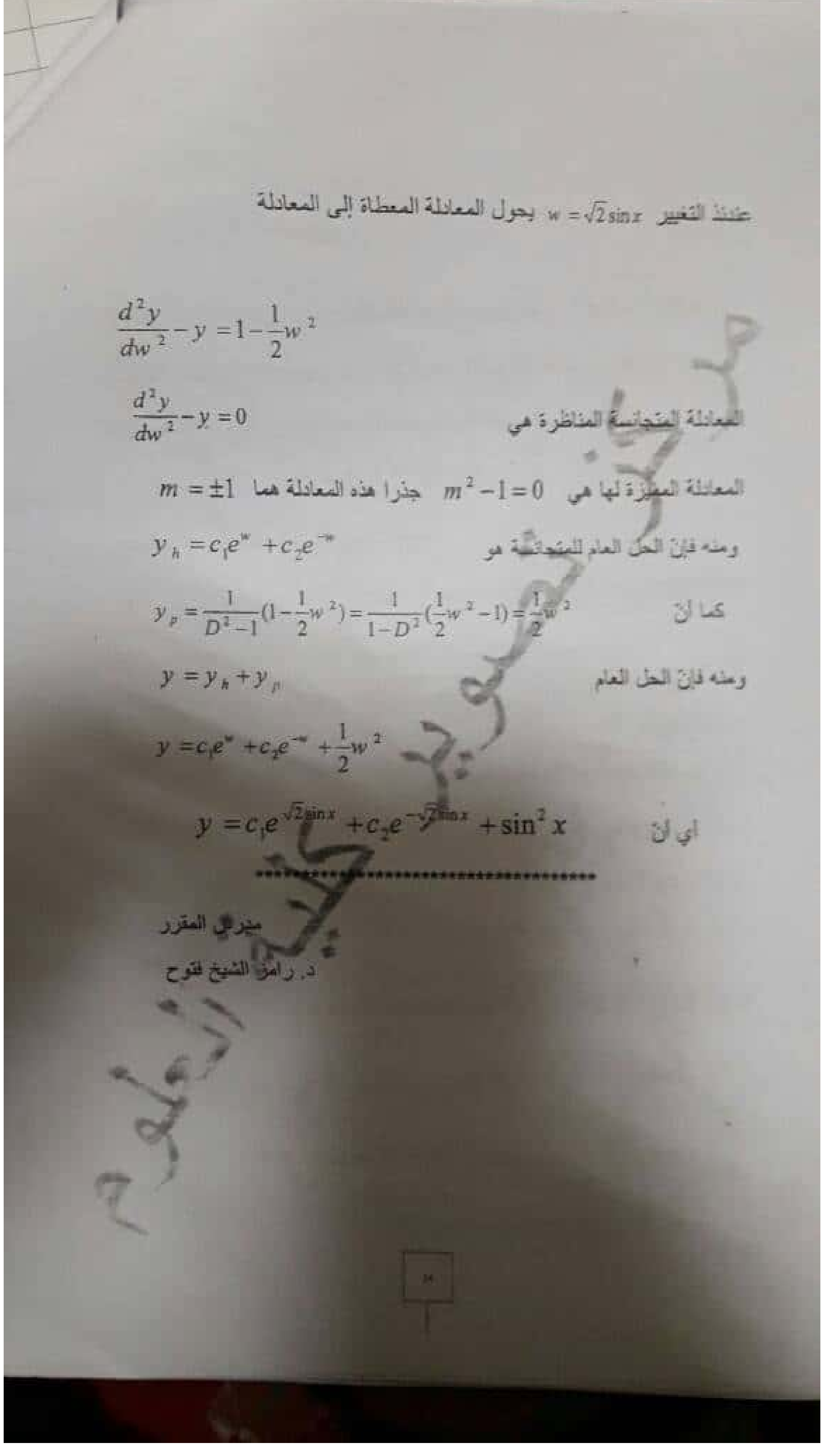
جواب السؤال الثالث :

$$w = \int\sqrt{\pm G(x)}dx = \int\sqrt{2}\cos x dx = \sqrt{2}\sin x$$

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{2}\cos x \rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = -\sqrt{2}\sin x$$

وبما أن

$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2} + p(x)\frac{dw}{dx}}{\left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}(\sqrt{2}\cos x)}{2\cos^2 x} = 0$$



عندئذ التغيير $w=\sqrt{2}\sin x$ يحول المعادلة المعطاة إلى المعادلة

$$\frac{d^2y}{dw^2}-y=1-\frac{1}{2}w^2$$

المعادلة المتجانسة المناظرة هي

$$\frac{d^2y}{dw^2}-y=0$$

المعادلة المميزة لها هي $m^2-1=0$ جذرا هذه المعادلة هما $m=\pm1$

ومنه فإن الحل العام للمتجانسة هو $y_h=c_1e^{w}+c_2e^{-w}$

كما أن

$$y_p=\frac{1}{D^2-1}\left(1-\frac{1}{2}w^2\right)=\frac{1}{1-D^2}\left(\frac{1}{2}w^2-1\right)=\frac{1}{2}w^2$$

ومنه فإن الحل العام

$$y=y_h+y_p$$

$$y=c_1e^{w}+c_2e^{-w}+\frac{1}{2}w^2$$

أي أن

$$y=c_1e^{\sqrt{2}\sin x}+c_2e^{-\sqrt{2}\sin x}+\sin^2 x$$

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح